

Notes sur les vecteurs propres d'une matrice

Pour simplicité on considère une matrice diagonalisable, A , réelle.

Les vecteurs propres "droites" $\vec{v}_k$ sont

$$A \vec{v}_k = \lambda_k \vec{v}_k$$

Les vecteurs propres "gauches" $\vec{u}_k$ sont

$$\vec{u}_k^T A = \lambda_k \vec{u}_k^T$$

Ils existent et il est facile à démontrer (en sens pas nécessairement rigoureux)

Les valeurs propres sont les zéros du polynôme caractéristique

$$\det(A - \lambda I)$$

Si on prend le polynôme caractéristique de la transposée

$$\det(A^T - \lambda I) = \det[(A - \lambda I)^T] = \det(A - \lambda I)$$

donc A et A^T ont les mêmes valeurs propres.

Alors

$$\vec{u}_k^T A = \lambda_k \vec{u}_k^T \rightarrow A^T \vec{u}_k = \lambda_k \vec{u}_k$$

Quelle est la relation entre $\{\vec{u}_k\}$ et $\{\vec{v}_k\}$?

On prend k et k'

$$A \vec{v}_k = \lambda_k \vec{v}_k \quad \xrightarrow[\text{à gauche par } \vec{u}_{k'}^T]{\text{on multiplie}}$$

$$\vec{u}_{k'}^T A \vec{v}_k = \lambda_k \vec{u}_{k'}^T \cdot \vec{v}_k$$

$$\vec{u}_{k'}^T A = \lambda_{k'} \vec{u}_{k'}^T \quad \xrightarrow[\text{à droite par } \vec{v}_k]{\text{on multiplie}}$$

$$\vec{u}_{k'}^T A \vec{v}_k = \lambda_{k'} \vec{u}_{k'}^T \cdot \vec{v}_k$$

↓ on soustrait

$$0 = (\lambda_k - \lambda_{k'}) \vec{u}_{k'}^T \cdot \vec{v}_k$$

Donc $\vec{u}_{k'}$ et $\vec{v}_k$ sont orthogonaux si $k \neq k'$

(ici pour simplicité on fait l'hypothèse que λ_k ne soit pas dégénéré, c'est à dire qu'il a multiplicité 1 pour chaque k ; le cas échéant est plus difficile à démontrer, mais on peut le faire).

Si par contre $k = k'$:

$$\vec{u}_k^T \cdot A \cdot \vec{v}_k = \lambda_k \vec{u}_k^T \cdot \vec{v}_k \Rightarrow \vec{u}_k^T \cdot \vec{v}_k \neq 0$$

et puisque un vecteur propre est défini à moins de la norme, on peut sans problèmes dire que

$$\vec{u}_{k'}^T \cdot \vec{v}_k = \delta_{kk'}$$

Donc les vecteurs propres gauches et droites sont orthogonaux entre eux, mais

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{u}_{k'}^T \cdot \vec{u}_n \neq 0 \\ \vec{v}_{k'}^T \cdot \vec{v}_k \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{l'orthogonalité est entre vecteurs propres droites et gauches!}$$

Finalement :

on peut représenter un vecteur $\vec{x}$ comme combinaison linéaire

des $\{\vec{v}_k\}$:

$$\vec{x} = \sum_k c_k \vec{v}_k$$

Les coefficients $\{c_k\}$ on les obtient par produit scalaire avec

$$\vec{u}_{k'}^T : \quad \vec{u}_{k'}^T \cdot \vec{x} = \sum_k c_k \vec{u}_{k'}^T \cdot \vec{v}_k = \sum_k c_k \delta_{kk'} = c_{k'}$$

Cas speciale : A symmetrique

Dans ce cas :

$$\vec{u}_k^T A = \lambda_k \vec{u}_k^T \Rightarrow A^T \vec{u}_k = \lambda_k \vec{u}_k$$

$$\downarrow A^T = A$$

$$A \vec{u}_k = \lambda_k \vec{u}_k$$

et alors $\vec{u}_k = \vec{v}_k$ et les vecteurs propres forment
un jeu de vecteurs orthogonales.

